MATERIAŁY DO ĆWICZEŃ Z MATEMATYKI

MACIERZE I WYZNACZNIKI

1.Dane są macierze:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Sprawdzić czy wykonalne są działania?

a) $3A+B$
b) EC^T
c) $(A+D)B$
d) $(A-B)C^T$
e) $C^T(A+B)$
f) A^2C
g) AB^2
h) $A+C^2$
i) $(D-E)C^T$
j) CDE
k) B^3A

2.Wykonać mnożenie macierzy:

a) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}^2$

d) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3$

j) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.Obliczyć wyrażenie:

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^3\right]^T$$

4.Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Czy określone są następujące iloczyny:

a) CAB^T b) ABC c) BA^TC^T

Przykład 1.

Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oblicz wartość wyrażenia: $\left[2A^2\right]^T - 3BC$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 = 2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[2A^2\right]^T = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3BC = 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[2A^2\right]^T - 3BC = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$$

5.Niech dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczyć wartość wyrażenia:

$$2A^2 - 3AB + 4B^3$$

6.Znaleźć f(A), jeżeli:

a) $f(X) = X^2 + 2X + I$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $f(X) = 2X^2 - 5X + 5I$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Przykład 2.

Obliczyć wartości wyznaczników:

a) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ad a) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = -6+2= -4

ad b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ = 1-18+0-6-0-6= -29

$\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{matrix}$

ad c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = (-1) D_{11}+(1) D_{13} =(-1)(-1)^2 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ +(1)(-1)^4 $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ =

(-1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = -(0+0+0-2-3-0)+(0+4+9-0+4-0)= 5+17=22

$\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$

Przykład 3.

Korzystając z własności wyznaczników obliczyć:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix}$

ad a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dodając do wiersza trzeciego wiersz drugi pomnożony przez (-2), a do czwartego wiersz drugi pomnożony przez (-1)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Z rozwinięcia Laplace`a dla kolumny trzeciej

$$\det A = 1 \cdot D_{23} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pisząc rozwinięcie wyznacznika dla wiersza trzeciego

$$\det A = -3 \cdot D_{31} = (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -3(3+12) = -45$$

ad b)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

Dodając wiersz pierwszy pomnożony przez (-1) kolejno do wiersza drugiego i czwartego, a następnie dodając wiersz pierwszy do piątego

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Wiersze – drugi i trzeci są jednakowe, zatem:

$$\det A = 0$$

7.Oblicz wartości wyznaczników:

a) $\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & -3 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

ł) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

8.Korzystając z własności wyznaczników oraz z rozwinięcia Laplace`a obliczyć wartości wyznaczników:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 17 \\ 6 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 10 & 11 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

9.Wykorzystując własności wyznaczników obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 201 & 50 \\ 281 & 70 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7777 & 574 \\ 1110 & 81 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 81 & 27 & -63 \\ 80 & 25 & -60 \\ -79 & -24 & 59 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos y + \cos x \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} \frac{1-x^2}{1+x^2} & \frac{2x}{1+x^2} \\ \frac{1+x^2}{2x} & \frac{1+x^2}{1-x^2} \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & a \\ 1 & c & a & b \\ 1 & \frac{a+b}{2} & \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a & b+c & d \\ b & c+a & d \\ c & a+b & d \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{vmatrix}$

10.Rozwiązać równania:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} (1+x) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1-x) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (1+x) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1-x) \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (x+1) & 2 & (x+3) & 4 \\ 1 & (3+x) & (4+x) & (5+x) \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0$

11.Rozwiązać nierówności

a) $\begin{vmatrix} 3x-5 & x-2 & x-3 \\ 2x+1 & x-1 & x+2 \\ 3x+1 & x-1 & 2x+2 \end{vmatrix} > 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

12.Nie obliczając występujących w nich wyznaczników wykazać równości:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ -a & 0 & -c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ b & ca & 1 \\ c & ab & 1 \end{vmatrix}$

Przykład 4.

Wykorzystując poznane metody wyznaczyć macierze odwrotne do poniższych:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ad a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ =0+6-8+6-2-0=2

$\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2 \qquad D_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3 \qquad D_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1$$

$$D_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4 \qquad D_{22}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6 \qquad D_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4$$

$$D_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4 \qquad D_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5 \qquad D_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$$

$$D^T=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ -4 & 6 & -4\\ -4 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ -4 & 6 & -4\\ -4 & 5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

ad b)

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Przestawiamy wiersz pierwszy z drugim:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pierwszy wiersz pomnożony przez (-2) dodajemy do wiersza drugiego, a następnie pomnożony przez (-1) dodajemy do trzeciego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wiersz drugi mnożymy przez (-1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wiersz drugi pomnożony przez (-3) dodajemy do pierwszego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wiersz trzeci mnożymy przez (-1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wiersz trzeci pomnożony przez (-1) dodajemy do wiersza pierwszego

$$\underset{\mathrm{I}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

13.Dla poniższych macierzy znaleźć macierze odwrotne:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

Przykład 5.

Wyznaczyć rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej stosując przekształcenia elementarne macierzy.

$$rz\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

14.Wykorzystując poznane metody wyznaczyć rzędy następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -12 & -6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Przykład 6.

Za pomocą przekształceń elementarnych sprowadzić macierz do postaci bazowej (kanonicznej) i określić jej rząd.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Po zamianie miejscami kolumn – pierwszej i drugiej, a następnie dodaniu wiersza pierwszego do piątego otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Wiersz czwarty pomnożony przez $\left(-\frac{1}{2}\right)$ dodajemy do wiersza piątego

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiersz pierwszy mnożymy przez (-1), wiersz trzeci i czwarty kolejno przez $\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiersz trzeci przestawiamy z drugim, a następnie wiersz drugi dodajemy do pierwszego, pomnożony przez (-3) do trzeciego, trzeciego pomnożony przez (-1) do czwartego.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiersz trzeci pomnożony przez (-1) dodajemy do czwartego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiersz trzeci dodajemy do pierwszego, a potem pomnożony przez (-1) do drugiego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uzyskana jest postać bazowa macierzy, z której wynika, że rząd macierzy jest równy 3

15.Sprowadzić następujące macierze do postaci bazowej:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

16.Przedyskutować wartości rzędów poniższych macierzy, w zależności od wartości parametru $a(a \in R)$

a) $\begin{bmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

1.Zapisać następujące układy równań w postaci równania macierzowego:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

2.Dane układy równań zapisać za pomocą równoważnych im równań macierzowych

a) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -6x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

3.Zapisać następujące układy równań liniowych w postaci macierzowej, a następnie obliczając macierz odwrotną znaleźć rozwiązania:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -7 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Przykład 1.

Korzystając ze wzorów Cramera, a następnie wykorzystując macierz odwrotną do macierzy współczynników układu, rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

1 sposób:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 - 2 = -1$$

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 5 - 0 - 2 - 2 = 1$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 + 5 - 4 = -1$$

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0+2+0-0+1-5=-2$$
$$\begin{matrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-2}{-1} = 2$$

2 sposób:

$$-x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 + 2x_3 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$$

detA=-1

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ $\quad D_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$D_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad D_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad D_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad D_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad D_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać następujące układy równań:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 17 \\ -x_1 + 3x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

Przykład 2.

Metodą operacji elementarnych rozwiązać następujące układy równań:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_4 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

ad a)

$$U=\begin{bmatrix}1&-2&2&3\\1&1&1&4\\2&-2&1&2\\2&-1&3&7\end{bmatrix}_1\begin{matrix}\\ w_2+(-1)w_1\\ w_3+(-2)w_1\\ w_4+(-2)w_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}0&-2&2&3\\0&3&-1&1\\0&2&-3&-4\\0&3&-1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ w_4+(-1)w_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&2&3\\0&3&-1&1\\0&2&-3&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ w_2+(-1)w_3\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&2&3\\0&1&2&5\\0&2&-3&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}w_1+2w_2\\ \\ w_3+(-2)w_2\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&6&13\\0&1&2&5\\0&0&-7&-14\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \left(-\frac{1}{7}\right)w_3\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&6&13\\0&1&2&5\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}w_1+(-6)w_3\\ w_2+(-2)w_3\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

rzA=rzU=3

Układ jest oznaczony i posiada jedno rozwiązanie:

$x_1=1$ $\qquad$ $x_2=1$ $\qquad$ $x_3=2$

ad b)

$$U=\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&0\\-1&1&0&-4&-1\\0&-1&3&-5&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ w_2+w_1\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&0\\0&-1&3&-5&-1\\0&-1&3&-5&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ w_3+(-1)w_2\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&0\\0&-1&3&-5&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

rzA=2, rzU=3

Układ jest sprzeczny.

Ad c)

$$U=\begin{bmatrix}2&-3&1&-1&1\\-1&0&-5&2&0\\3&-3&6&-3&1\end{bmatrix}$$

Po przestawieniu wiersza drugiego z pierwszym

$$U=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)w_1\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ w_2+(-2)w_1 \sim \\ w_3+(-3)w_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ w_3+(-1)w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)w_2 \sim \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rzA=rzU=2<4

Układ jest nieoznaczony o nieskończenie wielu rozwiązaniach

Otrzymany układ równoważny ma postać:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zmiana x_1, x_2 są zmiennymi bazowymi:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 + x_4 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Za zmienne niebazowe x_3, x_4 podstawiamy parametry: $x_3 = t_1, x_4 = t_2; t_1, t_2 \in R$

Zatem:

$$\begin{cases} x_1 = -5t_1 + 2t_2 \\ x_2 = -3t_1 + t_2 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Rozwiązaniem ogólnym układu jest wektor:

$x = \left[-5t_1 + 2t_2, -3t_1 + t_2 - \frac{1}{3}, t_1, t_2\right]$ gdzie $t_1, t_2 \in R$

Przykłady rozwiązań szczegółowych:

$t_1 = 0$ i $t_2 = 0$, $x = \left[0, -\frac{1}{3}, 0, 0\right]$

$t_1 = 0$ i $t_2 = 1$, $x = \left[2, \frac{2}{3}, 0, 1\right]$ i.t.d.

5.Znaleźć rozwiązanie ogólne i przykłady rozwiązań szczegółowych układów równań:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}$

6.Sprowadzić dane układy równań do postaci bazowej względem kolumny pierwszej i trzeciej, stosując metodę operacji elementarnych:

a) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_4 = 28 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 8 \\ -2x_1 - 6x_2 - 16x_3 = -8 \end{cases}$

7.Znaleźć wszystkie rozwiązania bazowe układów równań liniowych:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$

8.Rozwiązać następujące układy równań liniowych metodą operacji elementarnych:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = -1 \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \\ 6x_1 - 4x_3 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 4x_5 = -5 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -9 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 9x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

ł) $\begin{cases} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 3x+5y+z+t=15 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=4 \\ 4x+3y+z+t=5 \\ 5x+11y+3z+2t=2 \\ 2x+5y+z+t=1 \\ x-7y-z-2t=7 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-3x_2-x_3=3 \\ 4x_1-x_2+3x_3=11 \\ x_1-4x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

9.Wyznaczyć rozwiązania następujących układów równań jednorodnych:

a) $\begin{cases} 2x-4y=0 \\ 5x-10y=0 \\ 3x+5y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x-6y=0 \\ 6x-9y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_3-x_5=0 \\ x_4-x_6=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1-4x_2+7x_3=0 \\ -2x_1+5x_2-8x_3=0 \\ 3x_1-6x_2+9x_3=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_2-2x_4=0 \\ -x_1+2x_3+x_5=0 \\ -2x_2-x_4=0 \\ 2x_1+x_3-2x_5=0 \end{cases}$

10.Rozwiązać równania macierzowe:

a) $X\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $X\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11.Dla jakich wartości parametrów poniższe układy równań są niesprzeczne:

a) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5x_3 = k \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

$k \in R$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = k \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

$k \in R$

c) $\begin{cases} 3x + 5y + 6z = 8 \\ (m+2)x + (6+m)y + (8+m)z = 12 + m \\ (m-1)x + 5y + (m+z)z = m + 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + (a+1)y + (2a+3)z = 0 \\ 2x + (3a+1)y + 10z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax + (a+2)y + (a+1)z = 4a + 1 \\ (2a-2)x + 2ay + (2a-1)z = 3a + 3 \\ 2x + 4y + 3z = 2a + 5 \end{cases}$

12.Przeprowadź dyskusję rozwiązania poniższych układów równań w zależności od wartości występujących w nich parametrów:

a) $\begin{cases} (k-2)x + (2-k)y = 3k - 6 \\ (2k^2 - 8)x - (3k-6)y = 10 - 5k \end{cases}$, $k \in R$

b) $\begin{cases} kx + 4y = 2k \\ 9x + ky = 18 \end{cases}$, $k \in R$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$, $\quad a,b \in R$

ODPOWIEDZI :

MACIERZE I WYZNACZNIKI

1.

a)tak, b)nie, c)nie, d)nie, e)tak, f)tak,

g)tak, h)nie, i)tak, j)tak k)tak

2.

a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 11 \\ 14 & 17 & 17 \\ -6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & -6 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 11 & 17 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & 11 \\ 8 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

4.

a)tak b)nie c)tak

5.

$$\begin{bmatrix} -34 & 39 \\ 59 & 45 \end{bmatrix}$$

6.

a) $\begin{bmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 19 & -7 & 5 \\ -2 & 18 & -6 \\ -3 & 1 & 18 \end{bmatrix}$

7.

a)-2 b)-7 c)5 d)-84 e)-24 f)60

g)-10 h)-22 i)231 j)160 k)-452 l)-17

ł)665

8.

a)714 b)24 c)0 d)24 e)-45

9.

a)20 b)-7203 c)-90 d)0 e)0 f)0

g)0

10.

a)x=1/2 b)x=1 v x=-1/2 c)0 d)x=0 v x=-1

11.

a)x>1 b)-b<x<-4

12.

a)Należy wyłączyć przed znak wyznacznika (-1) kolejno z drugiej kolumny i z drugiego wiersza

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1/a & 1 & a \\ 1/b & 1 & b \\ 1/c & 1 & c \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ca & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ b & ca & 1 \\ c & ab & 1 \end{vmatrix}$ gdzie a,b,c, $\neq 0$

13.

a) $\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3/41 & -5/41 \\ 7/41 & 2/41 \end{bmatrix}$ c) $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 12/18 & 1/18 & 4/18 \\ -6/18 & 1/18 & 4/18 \\ -6/18 & 4/18 & -2/18 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

h) Macierz jest osobliwa i nie posiada macierzy odwrotnej

14.

a)3 b)3 c)2 d)2 e)2 f)4 g)2 h)2 i)2 j)3

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

3.

a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$

b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$

c) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

4.

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

c) $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

d) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

e) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$

f) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$

g) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

h) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$

8.

a)układ sprzeczny
b) $x_1 = -1/3$, $x_2 = -4/3$, $x_3 = 5/3$, $x_4 = 2/3$
c)układ sprzeczny
d)układ nieoznaczony $x_1 = t$, $x_2 = 15/7t + 1/7$, $x_3 = -6/7t + 1/7$ $t \in R$
e) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$
f) $x_1 = 2/3t_1 - t_3$, $x_2 = -5/3t_1 - t_2 - t_3 - 1$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, $t_1, t_2, t_3 \in R$
g) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$
h)układ sprzeczny
i)układ sprzeczny
j)układ sprzeczny
k) $x_1 = 2 - 3t$, $x_2 = -1/2 - 2t$, $x_3 = t$, $x_4 = 3/2 - 2t$, $t \in R$
l) $x_1 = -7t - 1$, $x_2 = 11t + 1$, $x_3 = -5t$, $x_4 = t$, $t \in R$
ł)x=3 , y=0 , z=-5 , t=11
m)układ sprzeczny
n) $x_1 = 3 - t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$, $t \in R$

9.

a)x=0 , y=0
b)x=3/2t , y=t , $t \in R$
c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$
d) $x_1 = t$, $x_2 = -3t$, $x_3 = -5$, $t \in R$
e) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$
f) $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = t$, $t \in R$
g) $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = t$, $t \in R$

10.

a) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

b) macierz X nie istnieje

c) $X = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 3-4/3t & t \end{bmatrix}$, $t \in R$

d) $X = \begin{bmatrix} -2/18 & 4/18 \\ 8/18 & 11/18 \end{bmatrix}$

11.

a)dla k=-2 układ jest nieoznaczony,
dla $k \neq -2$ układ jest sprzeczny

b)dla k=5/2 układ jest nieoznaczony,
dla $k \neq 5/2$ układ jest sprzeczny

c)dla $m \neq 4$ układ jest oznaczony,
dla m=4 układ jest nieoznaczony

d)dla a=1 układ jest nieoznaczony,
dla $a \neq 1$ układ jest oznaczony z jednym rozwiązaniem x=y=z=0

e)dla $a \neq 2$ układ jest oznaczony
dla a=2 układ jest nieoznaczony

12.

a)dla k=2 układ jest nieoznaczony,
dla k=-1/2 układ sprzeczny
dla pozostałych k układ oznaczony,

b)dla k=6 lub k=-6 układ nieoznaczony,
dla pozostałych k układ jest oznaczony

c)$a \neq 1 \wedge b \neq 4$ układ oznaczony,
$a=1 \wedge b \neq 1$ układ sprzeczny

$a=1 \land b=1$ układ nieoznaczony
$a \neq 1 \land b=4$ układ sprzeczny